

## Sử dụng MAPLE kiểm tra giả thuyết Fermat

Khi xét các số hạng  $a_n = 2^{2^n} + 1$ , P. Fermat (1601-1665) nhận thấy với  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  các số hạng  $a_n$  đều là các số nguyên tố.

Kiểm tra lại điều này khi sử dụng MAPLE. Lệnh **ifactor(a)** để phân tích số **a** ra thừa số nguyên tố. Lệnh **isprime(a)** để biết **a** có phải là số nguyên tố không. Câu trả lời là *true* hoặc *false*.

```
> a1:=2^(2^1)+1;ifactor(a1);isprime(a1);
```

```
a1 := 5
```

```
(5)
```

```
true
```

```
> a2:=2^(2^2)+1;ifactor(a2);isprime(a2);
```

```
a2 := 17
```

```
(17)
```

```
true
```

```
> a3:=2^(2^3)+1;ifactor(a3);isprime(a3);
```

```
a3 := 257
```

```
(257)
```

```
true
```

```
> a4:=2^(2^4)+1;ifactor(a4);isprime(a4);
```

```
a4 := 65537
```

```
(65537)
```

```
true
```

Từ đó, Fermat dự đoán rằng “ $a_n = 2^{2^n} + 1$  với  $n \in \mathbb{N}$  đều là các số nguyên tố”.

Một trăm năm sau, Euler (1707-1783) phát hiện ra  $a_5$  không phải là số nguyên tố. Dùng MAPLE để nhận thấy điều này.

```
> a5:=2^(2^5)+1;ifactor(a5);isprime(a5);
```

```
a5 := 4294967297
```

```
(641) (6700417)
```

```
false
```

MAPLE cho biết  $a_5$  là tích của hai thừa số nguyên tố: 641 và 6700417.

Lập lại các lệnh trên để kiểm tra  $a_6, a_7, a_8$ .

```
> a6:=2^(2^6)+1;ifactor(a6);isprime(a6);
```

```
a6 := 18446744073709551617
```

```
(67280421310721) (274177)
```

```
false
```

```
> a7:=2^(2^7)+1;ifactor(a7);isprime(a7);
```

```
a7 := 340282366920938463463374607431768211457
```

```
(5704689200685129054721) (59649589127497217)
```

*false*

```
> a8:=2^(2^8)+1;ifact(a8);isprime(a8);  
a8 := 1157920892373161954235709850086879078532699846656405640394575840 \  
07913129639937  
(93461639715357977769163558199606896584051237541638188580280321 )  
(1238926361552897)
```

*false*

Tuy nhiên khi yêu cầu phân tích  $a_9$  ra thừa số nguyên tố, MAPLE làm rất lâu. Do đó ta bỏ qua yêu cầu này và chỉ cần hỏi  $a_9$  có phải là số nguyên tố không, MAPLE trả lời ngay.

```
> a9:=2^(2^9)+1;isprime(a9);  
a9 := 1340780792994259709957402499820584612747936582059239337772356144 \  
37217640300735469768018742981669034276900318581864860508537538828 \  
11946569946433649006084097
```

*false*

Hãy thử cho  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{14}$ .

```
> a10:=2^(2^10)+1;isprime(a10);  
a10 := 179769313486231590772930519078902473361797697894230657273430081 \  
15773267580550096313270847732240753602112011387987139335765878976 \  
88144166224928474306394741243777678934248654852763022196012460941 \  
19453082952085005768838150682342462881473913110540827237163350510 \  
684586298239947245938479716304835356329624224137217
```

*false*

```
> a11:=2^(2^11)+1;isprime(a11);  
a11 := 323170060713110073007148766886699519604441026697154840321303454 \  
27524655138867890893197201411522913463688717960921898019494119559 \  
15049092109508815238644828312063087736730099609175019775038965210 \  
67960576383840675682767922186426197561618380943384761704705816458 \  
52036305042887575891541065808607552399123930385521914333389668342 \  
42068497478656456949485617603532632205807780565933102619270846031 \  
41502585928641771167259436037184618573575983511523016459044036976 \  
13233287231227125684710820209725157101726931323469678542580656697 \  
93504599726835299863821552516638943733554360213543322960464531847 \  
8604952148193555853611059596230657
```

*false*

```
> a12:=2^(2^11)+1;isprime(a12);
```

*false*

```
> a13:=2^(2^13)+1;isprime(a13);
```

```

a13 := 109074813561941592946298424473378286244826416199623269243183278 \
61897213318491192952162642345252019872239572917961570252731098708 \
20177184063610979765077554799078906298842192989538609825228048205 \
15969685161359163819677188654260932456012129055390188630101790025 \
25357999172000100796000265358368009052978058809523505016301954756 \
53911005312364560014847426035293551245843928918752768696279344088 \
05561751569434994540667782514081490061610592025643850457801332649 \
35658360472424073824428122451315177575191648992263657437224322773 \
68075027627883045206501792761700945699168497257879683851737049996 \
90096112051565505011556127149149251534210574896662954703278632150 \
57308284302216649703243961386352516264095161680054276234359963089 \
21691446181187406395310665404885739434832877428167407495370993511 \
86875635997039011702182361674945862096985700626361208270671540815 \
70665751372810270223109275649102767591605208783046324110493645687 \
54920967322982459184763427383790272448438018526977764941072715611 \
58043469082745933999196141424274141059911742606055648376375631452 \
76113626586283833686211579936380208785376755453367899156942344339 \
55666315070087213535470255670312004130725495834508357439653828936 \
07708097855057891296790735278005493562156109079584517295411597292 \
74798775277385600082041185589300047777487277618538135104938405818 \
61598652211605960308356405941821189714037868726219481498727603653 \
61629885617482241303348543878532402475141941718301228107820972930 \
35373728045743720952287036227763639452908698062584223551485075710 \
39619387449629866808188769662815778153079393179093143648340761738 \
58181956300299442279075495506128881830843007964869323217915876591 \
80355652161571154029921202761556078731079374774668415283629877086 \
99450152031231862594203085693838944657061346236704234026821102958 \
95495119708707654618662279629453645162075650935101890602377382153 \
95327762086769785897319663303088933046651694361850783506415683369 \
44530051437491311298834367265238595404904273455928723949525227184 \
61740436785475461047437701976802557660588103807727070771794222197 \
70903854385858440954921160998525389039746557039439730860909305969 \
63360767529964938414598185705963754561497355827813623833288906309 \
00428801732142480866396267133352800923275835087305961411872378142 \
21014601986157473868550968960891891804413395585248228675411132126 \
38793675567650340362970031930023397828465318547238244232028015189 \
68966041882297600081543761065225427016359565087543385114712321422 \
7266605403581781469090806576468950587661997186505665475715792897

```

Bỏ qua yêu cầu cho giá trị của  $a_{14}$  chỉ hỏi  $a_{14}$  phải là số nguyên tố không, MAPLE cho câu trả lời.

```

> a14:=2^(2^14)+1:isprime(a14);
false

```

Các  $a_n$  kiểm tra ở trên đều không phải là các số nguyên tố.  
 Vậy từ đó, liệu có thể suy đoán “Tất cả  $a_n$  với  $n \geq 5$  đều không phải là các số nguyên tố” chẳng???